

**Projet ANR-06-BLAN-0306**

# **COMMA : Couplage multi-physique et multi-échelles**

## **RESUME**

Le projet COMMA est un projet de recherche fondamentale en Mathématiques Appliquées coordonné par le Laboratoire Jean Kuntzmann (Université Joseph Fourier). Il associe aussi les laboratoires LAGA (Université Paris Nord), IMT (Université de Toulouse) et IMB (INRIA Bordeaux). Le projet a commencé en Octobre 2006 et a duré 36 mois. Il a bénéficié d'une aide ANR de 280 000 € pour un coût global de l'ordre de 2 200 000 €.

### **Multi-scale and multi-physics coupling**

#### **Design, validation and dissemination of coupling methods for problems involving several physical models and scales.**

This project is devoted to coupling methods in the field of environmental modeling and fluid-structure interactions.

In the first case, the challenge is to improve regional forecasting in oceanography and meteorology. These systems make routinely use of local mesh refinement and/or model coupling through domain decomposition. The validity of the results heavily depends on the quality of the interface operators. Our goal is to improve the present state of the art interface operators and to extend them to a wider class of models.

In fluid-structure interaction problems, the project is concerned with a new class of models for incompressible fluids interacting with rigid bodies, elastic bodies or elastic membranes. Our goal is to avoid expensive and cumbersome remeshing techniques that generally come with classical Lagrangian description of solids.

These various problems involve a wide range of physically and/or numerical scales and another goal of the project is to develop model coupling combined with adaptive refinement techniques, with a special emphasis on particle methods.

#### **Schwarz algorithms, immersed boundary methods, level set methods and adaptive mesh refinement.**

In domain decomposition methods for problems in environment, the techniques are Schwarz algorithms that are global in time, with interface conditions based on approximations of transparent exact conditions.

In fluid-structure interaction problems, the fluid and solid structures are modeled in an Eulerian framework. Interfaces are captured as level sets. Depending on the kind of interaction under consideration, interface conditions are written using the level set functions, penalization techniques or immersed boundary techniques.

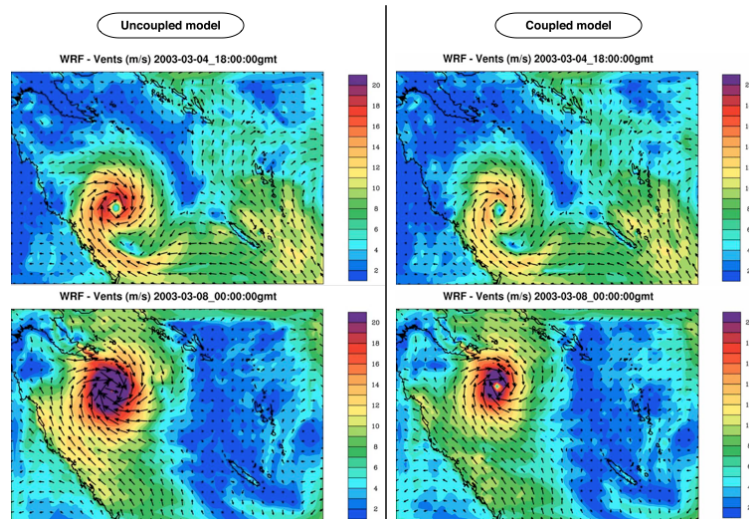
Concerning adaptive mesh refinement the project builds on an existing library (AGRIF) to design a hierarchy of grid levels.

## Major results :

The project allowed to derive improved interface conditions for a class of models considered in oceanography or meteorology. Preliminary tests on a realistic case of a tropical cyclone indicate a significant reduction in the forecasting error. The project has also allowed to validate and apply in a variety of challenging cases a new class of models for generic fluid-structure interactions. Algorithms and codes for Adaptive Mesh Refinement have also been developed in the context of immersed boundary methods.

## Illustration:

Wind speed and wind vectors at 10m height given by WRF atmospheric model during tropical Cyclone Erica in March 2003.



The uncoupled simulation (left) exhibits an overestimation of the cyclone intensity. On the contrary a 2-way coupled simulation with ROMS oceanic model (right) tends to a more realistic representation of wind speed. This improvement is mainly due to the feedback of the ocean onto atmosphere which is properly taken into account in the coupled simulation.

## MEMOIRE SCIENTIFIQUE

### 1. Conditions d'interface et décomposition de domaine.

Résoudre numériquement une EDP peut s'avérer très lourd en temps calcul. Les méthodes de décomposition de domaine permettent de décomposer le domaine de calcul et d'adapter les modèles et les discrétisations à chaque région géographique. Il s'agit alors d'écrire des conditions d'interface (ou de transmission) efficaces entre les sous-domaines.

#### 1.1 Conditions de transmission

##### Equation d'advection-diffusion

Les algorithmes de Schwarz optimisés avec relaxation d'onde (OSWR algorithms) ont été introduits pour des équations à coefficients constants en dimension 1 à DD11 en 1999 par Gander-Halpern-Nataf. Ces algorithmes utilisent des conditions d'interface dont les coefficients sont choisis de façon à optimiser le taux de convergence. L'optimisation du taux de convergence a été jusque-là traitée numériquement. Puis dans [BGH09], nous avons établi des formules asymptotiques pour les coefficients et le taux de convergence dans le cas monodimensionnel. Par la suite, dans [GGH10], nous avons publié les formules détaillées dans le cas bi-dimensionnel, avec ou sans recouvrement (un papier détaillé est en préparation). Ce travail a été exposé au congrès DD 19.

De premiers résultats de convergence de l'algorithme avaient été donnés dans [Mar05] et [BGH09] dans le cas de coefficients constants, frontières rectilignes, et sous-domaines en bandes. Ensuite, dans le cas sans recouvrement, nous avons étendu les démonstrations de P.L. Lions et B. Després au cas à coefficients variables (y compris discontinus à l'interface), frontière courbe [HJS10], avec des conditions de transmission très générales.

## Systèmes d'équations de l'océan

Des conditions de transmission "optimisées" avaient été dérivées par V. Martin dans sa thèse pour les **équations de Saint-Venant** équatoriales linéaires, sans termes advectifs et avec termes visqueux et force de Coriolis. L'approximation de l'application de Dirichlet-Neumann se faisait pour une petite viscosité et une force de Coriolis faible. Cette étude a été reprise et étendue dans un article à SISC, avec une étude numérique approfondie (schéma volumes finis). Elle montre d'excellentes performances de la méthode de Schwarz optimisée

La stratégie a été reprise et étendue pour aller vers le traitement des **équations primitives** visqueuses dans [ADM11]. Il s'agit des équations de Navier-Stokes 3D avec surface libre et rotation, avec les hypothèses hydrostatique et de Boussinesq. Nous avons travaillé sur une version linéarisée et adimensionnée du système, et en faisant l'hypothèse d'une variation linéaire de la densité avec la profondeur. Une approximation par rapport au nombre de Rossby est faite.

Un travail sur la décomposition de domaine par méthode de Schwarz pour **Navier-Stokes** (thèse de D. Chere) a également débuté. L'objectif final est d'aller vers le couplage entre les systèmes de Navier-Stokes et les équations primitives de l'océanographie, qui dérivent de Navier-Stokes en faisant tendre le rapport d'aspect (i.e. le rapport des dimensions caractéristiques verticale et horizontale) vers 0. Un tel couplage correspond en pratique à la possibilité de mettre en place des systèmes de simulation allant de l'océan hauturier jusqu'à l'océan côtier, et capable de représenter des phénomènes non hydrostatiques près des côtes.

## Conditions de frontières ouvertes pour les modèles océaniques

On s'intéresse ici à la dynamique locale d'un fluide sur un domaine géographique limité. Une partie des frontières de ce domaine est donc purement artificielle : elle ne correspond à aucune limite physique. Il faut alors définir des conditions aux limites adéquates, appelées conditions de frontières ouvertes (CFO) sur ces frontières.

Les CFO les plus utilisées en océanographie et météorologie sont de type relaxation ou radiation, toutes deux prenant en compte les données extérieures. Nous avons montré dans des travaux antérieurs au projet COMMA [BD05] que l'efficacité de ces CFO est étroitement liée à une prise en compte de la nature hyperbolique des équations, et il a été proposé de prescrire les caractéristiques entrantes pour les équations de Saint-Venant. Celles-ci correspondant à l'ordre 0 des conditions aux limites absorbantes précédemment décrites, nous avons donc proposé de développer ces conditions pour améliorer les résultats. Ce travail a été mené de façon théorique et une implémentation numérique débute actuellement sur les équations de Saint-Venant 1D et 2D.

Notons que si les données extérieures sont de mauvaise qualité, les performances s'en trouvent dégradées. Nous avons cherché dans ce cas des pistes afin de compenser cette source d'erreur, en étudiant le problème modèle très simple  $-u'' + a u = f$ . Nous avons ainsi mis en évidence comment perturber la CFO pour que celle-ci soit plus efficace. Toutefois, cette idée est difficile à mettre en œuvre pour des équations plus complexes et nous cherchons actuellement à la simplifier.

## 1.2 Méthodes de décomposition de domaines non-conformes espace-temps

L'algorithme de Schwarz tel que nous le proposons se prête tout naturellement au raffinement espace-temps, puisque les traitements dans les sous-domaines sont indépendants. Dans [GHN03], nous proposons pour l'équation des ondes en dimension 1, avec des vitesses différentes dans les sous-domaines, un petit script optimal de projection. Nous avons également établi des estimations d'erreur optimales. Nous avons ensuite poursuivi et développé cette idée pour l'équation d'advection-diffusion. Une série de présentations à des congrès (avec les articles) en est issue, [HJS09], [BHJ07], [GJ09]. Des articles ont été soumis [HJS10], [MJN11].

Dans [GJ09], M. Gander et C. Japhet ont développé une technique de front rapide pour calculer une projection d'une grille triangulaire arbitraire sur une autre grille triangulaire arbitraire en dimension 2 et 3. Ils l'ont utilisée dans un code éléments finis en espace, couplé avec de nouveaux éléments finis de type « ciment » pour gérer les non-conformités en espace. Un papier est en cours de révision sur l'équation de Poisson avec des conditions de transmission de Robin [JMN11].

Nous avons présenté dans [GHK07] de premiers calculs monodimensionnels de résolution de l'équation d'advection-diffusion avec des coefficients discontinus, au moyen de conditions de transmission optimisées de type Robin, pour lesquelles nous avons donné des valeurs asymptotiques. Ces calculs étaient faits au moyen d'un schéma volumes finis. Ensuite dans [HJS09] et [HJS10], nous avons introduit une méthode de Galerkin discontinue en temps, et un algorithme de Schwarz discret

sur des grilles différentes dans des sous-domaines différents. Un code a été réalisé, avec en temps un schéma Galerkin discontinu de degré 1 et en espace des éléments finis. Des éléments frontières de type « ciment » ont été dessinés pour les conditions aux limites de type Ventcell, et tout cela a été implémenté avec les algorithmes optimaux de projection.

Le code montre une convergence extrêmement rapide de l'algorithme de Schwarz optimisé, et un ordre de convergence optimal.

Une application au couplage océan-atmosphère est en cours. Nous rencontrons néanmoins à ce stade quelques difficultés, le modèle dont nous disposons aujourd'hui nécessite des maillages très fins au voisinage de l'interface. Il faudra donc utiliser aussi une décomposition de domaine dans chacun des sous-domaines.

### 1.3 Applications

#### **Couplage entre un modèle océanique grande échelle et un modèle régional**

Différentes méthodes d'interaction entre deux modèles ont été comparées sur l'exemple du couplage entre deux modèles aux équations primitives de circulation océanique, l'un simulant l'Atlantique Nord avec une résolution d' $1/3^\circ$  et l'autre simulant le Golfe de Gascogne au  $1/15^\circ$ . Des approches de frontières ouvertes, de couplage non itératif *one-way* (c.a.d. sans rétroaction du modèle haute résolution vers le modèle basse résolution) et *two-way* (c.a.d. avec rétroaction), et de couplage itératif par méthode de Schwarz ont été mises en oeuvre. Il apparaît clairement [CFB08] que les couplages sans rétroaction mènent à de moins bons résultats que les méthodes avec rétroaction. De plus, la méthode de Schwarz fournit la solution la plus régulière, ce qui est conforme aux attentes car les couplages *one-way* et *two-way* utilisés en océanographie sont des méthodes ad hoc relativement peu coûteuses, mais qui ne mènent pas à une solution totalement consistante d'un point de vue mathématique. L'impact de la qualité mathématique de la solution sur la physique reste à mieux quantifier, en collaboration avec les physiciens, ce qui est difficile faute d'un cas-test réaliste pour lequel la solution est parfaitement connue.

#### **Couplage océan-atmosphère à échelle régionale**

De nombreuses applications en océanographie et météorologie à échelle régionale nécessitent l'utilisation de modèles à haute résolution faisant appel à des estimations des flux air-mer. Si l'intégration en mode forcé (c.a.d. sans rétroaction d'un modèle vers l'autre) peut s'avérer suffisante pour certaines applications, un véritable couplage est cependant indispensable pour simuler des phénomènes complexes comme les cyclones tropicaux, ou encore pour des études climatiques. Dans ce cas, la connexion des deux modèles à l'interface air-mer est un problème difficile, souvent traité de façon simplifiée.

Dans ce contexte, les méthodes de décomposition de domaine fournissent un cadre efficace pour le couplage de modèles, y compris avec raccords non-conformes en temps et en espace. Ainsi, nous avons montré que les méthodes usuelles des géophysiciens peuvent être réécrites comme une unique itération d'un algorithme de couplage de Schwarz, avec des conditions d'interface non optimales.

Pour évaluer l'impact de la procédure itérative dans une application réaliste, nous avons simulé (en collaboration avec P. Marchesiello, IRD), le cyclone tropical Erica (en 2003, au voisinage de la Nouvelle-Calédonie). Des différences significatives sont observées entre solutions convergée et non convergée. En particulier, la solution convergée semble nettement plus robuste vis à vis des incertitudes dans les paramètres des modèles.

Afin d'optimiser la vitesse de convergence des méthodes de Schwarz, nous avons travaillé sur le problème-modèle du couplage de deux équations de diffusion 1-D avec coefficients discontinus à l'interface. Bien que simplifié, ce problème contient une part importante des difficultés rencontrées pour le couplage océan-atmosphère. De nouvelles conditions d'interface optimisées ont été obtenues pour des algorithmes de type Neumann-Robin et Robin-Robin, dans le cas de coefficients de diffusion constants sur chacun des domaines [LDB10a], puis dans le cas de coefficients variables en espace [LDB10b].

## 2 Frontières immergées et multi-physique

Le couplage concerne ici des fluides et des solides. Cette partie du projet concerne le développement de méthodes où les conditions limite sur les obstacles ou conditions d'interface en phase solide et phase fluide sont traitées par des techniques de frontières immergées, c'est à dire avec des maillages qui ne s'appuient pas nécessairement sur ces contours.

## 2.1 Un cadre général pour l'interaction fluide-structure.

Partant d'un modèle level set pour l'interaction d'un fluide incompressible avec une membrane élastique, nous avons fait l'analyse mathématique de ce modèle, et nous l'avons généralisé pour prendre en compte des solides élastiques incompressible généraux [CMM08]. L'ensemble du système est représentée comme un fluide à rhéologie et densité variables. Une ou plusieurs fonctions level set permettent de capturer les interfaces fluide/solide et les efforts élastiques. Ce modèle a été appliqué pour des problèmes de vésicules biologiques et de dynamique de cardiomyocytes [MMCRU09].

Parallèlement, une méthode de pénalisation pour l'interaction d'un fluide avec un solide rigide a été conçue et validée dans [CC08]. Une analyse numérique de cette méthode a été réalisée dans [BCM10]. Les contacts entre solides sont aussi gérés par des fonctions level set. Une implémentation de cette méthode sur processeurs GPU a été effectuée dans [RBCK10].

Dans tous ces cas, la facilité d'implémentation, y compris pour des écoulement complexes tri-dimensionnels, la bonne précision et une réduction notable du coût de calcul sont des caractéristiques des méthodes développées. Trois thèses ont été soutenues dans la période en lien avec ces travaux (C. Bost, T. Milcent et M. Coquerelle).

## 2.2 Adaptation en temps

Une analyse préliminaire de la stabilité numérique du couplage fluide-membrane élastique a été réalisée dans un cas simplifié. Elle a permis de généraliser des conditions utilisées de manière heuristique dans des problèmes à frontière libre et a mis en évidence la nécessité de concevoir des méthodes de couplage semi-implicites pour traiter le cas de solides élastiques avec forte raideur, ou si l'on souhaite faire du raffinement de maillage au voisinage de l'interface fluide-solide. Plusieurs pistes sont actuellement envisagées en prolongement de ce travail.

## 3 Méthodes Particulaires

Certains des problèmes évoqués dans le volet précédent utilisent des discrétisations par méthodes particulières. Cette dernière partie du projet concerne des développements méthodologiques et logiciels sur ces méthodes.

### 3.1 Méthodes particulières, frontières immergées et multi-résolution

Un premier ensemble de travaux a consisté à implémenter et comparer différentes techniques de raccord entre régions de différentes résolutions, dans un cadre indifféremment eulérien ou lagrangien. Les méthodes de transfert entre grilles et particules, notamment près des parois de raccord ont nécessité une attention toute particulière.

On a tout d'abord développé une méthodologie pour le calcul d'écoulements en géométrie complexe, pour les formulations en vitesse-vorticité des équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles:

- Par de méthodes de surfaces immergées implicites [P09]
- En générant des flux de tourbillons aux parois afin de garantir des conditions aux limites en vitesse [P07].
- avec gestion de géométries complexes et/ou mobiles par méthodes de pénalisation [CC08, RBCK10].

Une seconde phase du projet a consisté à intégrer ces méthodes dans la librairie MSFF « Multi-Scale Flow in Fortran ». Cette bibliothèque gère le calcul multi-résolution avec un couplage entre les étages de la hiérarchie de grilles assuré par le code et l'analyseur syntaxique AGRIF.

Le calcul multi-échelle est incontournable pour des géométries ou des données dont la finesse est localement indispensable mais dont l'utilisation de la résolution la plus fine au niveau global n'est pas gérable par les moyens technologiques actuels. Notre code multi-résolution a été testé sur un vortex ellipsoïde 3D (dans [OP10]) jusqu'à  $4 \cdot 10^8$  particules, avec une précision équivalente à un maillage uniforme de  $3.63 \cdot 10^9$  particules. Des écoulements autour de géométries particulièrement délicates ont été ainsi calculés et ont servi de tests pour la validation du code.

Afin d'assurer la gestion des surfaces pour les méthodes de surface immergées nous avons adopté la structure de données du logiciel MEDIT (développé par l'équipe INRIA Gamma).

La méthode de pénalisation pour les équations de Navier-Stokes en vorticité a été couplée avec le formalisme multi-échelle et le calcul de vorticité singulière aux bords (paragraphe ci-dessus). La méthodologie et le couplage de ces trois aspects a été publié [OP10].

Le couplage de ces méthodes avec AGRIF a permis l'adaptation automatique de raffinement dans le logiciel libre de calcul MSFF. Cet ensemble de programmes ainsi qu'une batterie de cas-tests ont été mis en ligne.

### 3.2 Analyse des méthodes particulières

Le projet a permis de prolonger nos études sur les liens entre méthodes particulières avec remaillage et les méthodes de différence finies. Ces liens ont été exploités pour définir en une dimension des techniques de limiteurs permettant de supprimer les oscillations produites dans la phase de remaillage des particules. De nouvelles techniques de splitting en temps ont permis d'étendre ces techniques au cas multi-dimensionnel [CM09]. Ces méthodes ont été validées sur l'équation de Burgers et sur le transport de scalaire en 3D, avec une attention particulière sur la capacité des méthodes particulières à s'affranchir des conditions CFL classiques. Ces études se poursuivent actuellement pour traiter les cas de systèmes hyperboliques non-linéaires 2D et 3D.

#### LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS PRINCIPALES

*Revue internationale à comité de lecture*

[Mar09] V. Martin, Schwarz waveform relaxation algorithm for the linear viscous equatorial shallow water equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 31(5), 3595-3625, 2009.

[ADM10] E. Audusse, P. Dreyfuss, B. Merlet, Optimized Schwarz waveform relaxation for primitive equations of the ocean. hal-00386817. Accepté dans SISC.

[BGH09] D. Bennequin, M. Gander and L. Halpern, A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation. *Math. Comp.*, 78(265), 185-223, 2009.

[BCM10] C. Bost, G.-H. Cottet and E. Maitre, Numerical analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid, to appear in *SIAM J. Num. Anal.*

[CFB08] S. Cailleau, V. Fedorenko, B. Barnier, E. Blayo, and L. Debreu: Comparison of different numerical methods used to handle the open boundary of a regional ocean circulation model of the Bay of Biscay. *Ocean Model.*, 25(1-2):1-16, 2008.

[CC08] M. Coquerelle and G.-H. Cottet, A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies, *J. Comput. Phys.*, 227 (21), 9121-9137, 2008.

[CM09] G.-H. Cottet and A. Magni, TVD remeshing formulas for particle methods, *C. R. Math.*, 347 (23-24), 1367-1372, 2009.

[CMM08] G.-H. Cottet, E. Maitre and T. Milcent, Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction, *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 42 (3), 471-492, 2008.

L. Debreu and E. Blayo, Two-way embedding algorithms: a review. *Ocean Dyn.*, 58(5-6):415-428, 2008.

L. Debreu, C. Vouland, and E. Blayo, AGRIF: Adaptive grid refinement in Fortran. *Comput. Geosci.*, 34(1):8-13, 2008.

[GH07] M. Gander and L. Halpern, Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45 (2), 666-697, 2007.

[Hal06] L. Halpern, Absorbing boundary conditions and optimized Schwarz waveform relaxation. *BIT*, 46, suppl., S21-S34, 2006.

[MMCRU09] E. Maitre, T. Milcent, G.-H. Cottet, A. Raoult and Y. Usson, Applications of level set methods in computational biophysics, *Math. Comput. Model.*, 49 (11-12), 2161-2169, 2009. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00177593/fr/>.

E. Nourtier-Mazauric and E. Blayo, Towards absorbing boundary conditions for the 1-D biharmonic diffusion equation. *Appl. Numer. Math.*, 60:83–93, 2010.

[0P10] M. El Ossmani and P. Poncet, Efficiency of multiscale hybrid grid-particle vortex methods, à paraître dans *SIAM Multiscale Model. Simul.*

[P09] P. Poncet, Analysis of an immersed boundary method for three-dimensional flows in vorticity formulation, *J. Comp. Phys.* 228, 7268–7288 (2009).

[P07] P. Poncet, Analysis of direct three-dimensional parabolic panel methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 45(6), 2259–2297 (2007).

[RBCK10] D. Rossinelli, M. Berdorf, G.-H. Cottet and P. Koumoutsakos, GPU accelerated simulations of bluff body flows using vortex methods, *J. Comput. Phys.*, 229 (9), 3316–3333, 2010.

### *Actes de congrès :*

E. Audusse, E. Blayo, L. Halpern, C. Japhet, V. Martin, and E. Nourtier-Mazauric. Efficient interface conditions for the coupling of ocean models. In E. Onate, M. Papadrakakis, and B. Schrefler, editors, 2nd International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, Coupled Problems 2007, May, 2007, pages 528–531, Santa Eularia, Ibiza, Espagne, 2007.

[BHI07] E Blayo, L. Halpern, C. Japhet: Optimized Schwarz waveform relaxation algorithms with nonconforming time discretization for coupling convection-diffusion problems with discontinuous coefficients. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*, 267–274, *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, 55, Springer, Berlin, 2007.

G.-H. Cottet, E. Maitre and T. Milcent, An Eulerian method for fluid-structure interaction with biophysical applications, In European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006. P. Wesseling, E. Oñate and J. Périaux (Eds), Delft, Pays-Bas, septembre 2006.

G.-H. Cottet, E. Maitre and T. Milcent, New methods in fluid-structure coupling with application to biomechanics, *Proc. Appl. Math. Mech.*, 7 (1), 1140301–1140302, 2007. Special Issue: Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich 2007

[GGH10] M.J. Gander, L. Gouarin, L. Halpern: Optimized Schwarz waveform relaxation methods: a large scale numerical study. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer-Verlag, 2010.

[GHK07] M. Gander, L. Halpern and M. Kern: A Schwarz waveform relaxation method for advection-diffusion-reaction problems with discontinuous coefficients and non-matching grids. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*. Series: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 55 Widlund, Olof B.; Keyes, David E. (Eds.), Springer, 2007.

M.J. Gander, L. Halpern, C. Japhet and V. Martin: Advection-Diffusion Problems with Pure Advection Approximation in Subregions. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*; Series: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 55, O.B. Widlund, D. Keyes (Eds.), Springer, pp. 239-246, 2007.

[GJ09] M.J. Gander and C. Japhet: An Algorithm for Non-Matching Grid Projections with Linear Complexity, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pp. 185–192, Springer-Verlag, 2009.

[HJS09] L. Halpern, C. Japhet and J. Szeftel, Discontinuous Galerkin and nonconforming in time optimized Schwarz waveform relaxation, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, 2009.

M. El Ossmani and P. Poncet, New trends in multi-scale simulation using hybrid grid-particle vortex methods, Proceedings of MAMERN'09, Pau, France (2009).